

脉冲噪声环境下高斯稀疏信源 贝叶斯压缩感知重构

季云云¹, 杨 震²

(1. 南京邮电大学通信与信息工程学院, 江苏南京 210003;

2. 南京邮电大学“宽带无线通信与传感网技术”教育部重点实验室, 江苏南京 210003)

摘 要: 大多数现有的压缩感知重构算法对脉冲噪声不具有鲁棒性, 在脉冲噪声环境下, 重构性能急剧下降, 使得整个重构系统崩溃. 针对此问题, 本文提出了一种脉冲噪声环境下的稀疏重构算法 BINSR 算法, 其基于贝叶斯理论, 可以有效地估计出信号的支撑集和脉冲噪声中脉冲的位置, 并且根据压缩感知观测序列的 democracy 特性, 利用最小均方误差 MMSE 估计量, 有效地估计出原信号. 在此基础上, 本文结合鲁棒统计学, 提出自适应的 ABINSR 算法, 使其不再依赖于信号以及噪声的统计参数. 实验结果表明, BINSR 算法在脉冲噪声环境下可以有效地恢复出稀疏信号, 很大程度上改善了脉冲噪声环境下算法的重构性能. ABINSR 算法不仅对脉冲噪声具有鲁棒性, 而且可以在高斯白噪声环境下实现有效的信号重构.

关键词: 脉冲噪声; 压缩感知; 贝叶斯理论; 鲁棒统计学

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)02-0363-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.02.025

Bayesian Compressed Sensing for Gaussian Sparse Signals in the Presence of Impulsive Noise

Ji Yun-yun¹, YANG Zhen²

(1. College of Communication and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210003, China;

2. Key Lab of Broadband Wireless Communication and Sensor Network Technology, Ministry of Education, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

Abstract: Most existing reconstruction algorithms are not robust to the impulsive noise, resulting in a sharp decline in reconstruction performance, so that the entire reconstruction system crashes. A sparse reconstruction algorithm named BINSR is proposed in this paper for the impulsive noise environment. Based on the Bayesian theory, the BINSR algorithm can effectively estimate the support of the sparse signal and the impulse location of impulsive noise. In light of the democracy property of measurements, the MMSE estimate is employed in the BINSR algorithm to achieve effective estimation. And then, combining with robust statistics, a kind of adaptive algorithm termed as ABINSR is proposed in this paper so that it no longer relies on the statistical parameters of signals and impulsive noise. Simulation results demonstrate that the BINSR algorithm can effectively recover sparse signals, greatly improving the reconstruction accuracy in the presence of impulsive noise. Moreover, the ABINSR algorithm is not only robust to the impulsive noise but also effective in the additive white Gaussian environment.

Key words: impulsive noise; compressed sensing; Bayesian theory; robust statistics

1 引言

传统的信号处理的方法要求采样速率必须大于或

者等于信号最高频率或者带宽的两倍, 才能从采样后的信号中无失真的恢复出原信号. 因而, 在传统的信号处理系统中, 一方面对于宽带信号的处理面临很大的挑

战,因为要制造出非常高速的采样器件.另一方面,信号在传输之前,必须要进行压缩,也意味着原先存储的大部分数据将被丢弃,造成了资源的浪费.近几年兴起的压缩感知理论(Compressed Sensing, CS)^[1~5],基于“边采样边压缩”的思想,可以很好地解决上述问题.压缩感知理论指出,利用一个具有近似正交性的矩阵将信号向量投影到低维空间,获得观测序列,只要信号向量足够稀疏,则可以利用重构算法高概率精确地重构出原信号.在压缩感知框架中,如何设计出一种有效的、精确的重构算法是保证压缩感知系统性能的关键,这个方面已经有许多研究成果.

然而,在实际的通信环境中,噪声是不可避免的,因而针对受到噪声干扰的观测序列设计性能理想的重构算法,是压缩感知系统应用到实际环境中至关重要的一个环节.在现有的压缩感知系统中,能够处理含噪问题的重构算法主要可以分为三类,第一类主要只假设噪声能量受限,在稀疏的前提下,通过求解有约束的最小二乘问题来重构信号,这类算法主要包括了LASSO(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)^[6]和SP(Subspace Pursuit)^[7]等.第二类则主要从噪声的统计特性出发,一般均假设为高斯白噪声,利用贝叶斯框架来实现信号的重构,这类算法主要包括BCS(Bayesian Compressed Sensing)^[8]和FBMP(Fast Bayesian Matching Pursuit)^[9]等.然而,这两类算法在脉冲噪声环境下性能均不理想,甚至当脉冲能量比较大的时候,基于上述这些算法的压缩感知的重构系统将会崩溃,完全无法重构出信号,其主要原因在于,第一类算法中最小二乘对于脉冲噪声不具有鲁棒性^[10],第二类算法在建立模型时就没考虑脉冲噪声的影响.第三类算法为JP(Justice Pursuit)^[11]算法,是目前在压缩感知框架下处理脉冲噪声问题的主要方法,但是这一算法对脉冲数非常的敏感,当脉冲比增加时,性能会有明显的下降.

脉冲噪声也是通信和信号处理系统中常见的一类噪声^[10,12~17].比如,在多用户检测的无线通信系统^[12]和电力线传输系统^[13]中,脉冲噪声总是存在于信道中.而在图像、视频和音频的处理系统中,脉冲噪声也是比较常见的^[15~17].脉冲噪声的存在将给信号的有效传输和处理带来极大的挑战.而压缩感知作为一种新兴的信号采样技术,其将代替奈奎斯特采样定理,是对通信和信号处理系统根本性的变革.因而,研究脉冲噪声对于压缩感知系统的影响是十分必要的^[18],也是本文研究的出发点.

脉冲噪声对于压缩感知系统的影响和对传统的通信和信号处理系统不一样,在传统的通信和信号处理系统中,由于脉冲的持续时间很短,影响的仅仅是信号的几个样值点,这种影响是局部的,而在压缩感知系统

中,脉冲噪声影响的是观测序列中的样值,而每个观测值均与整个原始信号向量相关,所以这种影响将是全局性的,因而脉冲噪声对于压缩感知系统的影响是非常大的,设计一种能从受脉冲噪声干扰的观测序列中有效地恢复原信号的重构算法,对于压缩感知在实际环境中的应用有十分重要的意义.

本文基于贝叶斯理论,提出一种BINSR(Bayesian Impulsive Noise Sparse Reconstruction)算法在脉冲噪声环境下恢复稀疏信号,并在此基础上,结合鲁棒统计学^[10],提出自适应的ABINSR(Adaptive Bayesian Impulsive Noise Sparse Reconstruction)算法,使得算法不依赖于信号与噪声的统计参数.仿真实验结果表明,BINSR算法以及ABINSR算法在脉冲噪声环境下可以有效地恢复出原信号,并且性能远优于现有的一些重构算法.

2 压缩感知理论

信号向量 $\mathbf{x} = [x(1) \ x(2) \ \cdots \ x(N)]^T \in R^N$ 是 K -稀疏的,即信号 \mathbf{x} 的支撑集 $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{i: x(i) \neq 0\}$ 的势满足

$$|\text{supp}(\mathbf{x})| \leq K \quad (1)$$

我们可以利用一个观测矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$ 将信号向量 \mathbf{x} 投影到低维空间获得观测序列,考虑到实际环境中存在噪声,则在接收端所获得观测序列可以表示成

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (2)$$

其中 \mathbf{w} 为噪声向量.

当观测矩阵 Φ 满足受限等距特性(Restricted Isometry Property, RIP)^[19]或者零空间特性(Null Space Property, NSP)^[20]时,可以通过重构算法有效地恢复出原信号.本文中主要采用的观测矩阵为高斯随机矩阵^[2],当观测数 M 满足

$$M \geq CK \log(N/K) \quad (3)$$

高斯随机矩阵可以高概率地满足 K 阶 RIP 条件^[19].

压缩感知理论的关键在于如何从式(2)的观测向量 \mathbf{y} 中恢复出信号向量 \mathbf{x} .压缩感知理论发展至今,提出了很多的算法来实现信号的有效重构.除了引言中提及的算法之外,还有BPDN(Basis Pursuit Denoising)算法^[21]、GPSR(Gradient Projection for Sparse Reconstruction)算法^[22]、OMP(Orthogonal Matching Pursuit)算法^[23]、StOMP(Stagewise Orthogonal Matching Pursuit)算法^[24]、ROMP(Regularized Orthogonal Matching Pursuit)算法^[25]、SAMP(Sparsity Adaptive Matching Pursuit)算法^[26]、ExCoV(Expansion-compression Variance-component)算法^[27]等.

3 贝叶斯脉冲噪声稀疏重构(Bayesian Impulsive Noise Sparse Reconstruction, BINSR)算法

本文中处理的信源为高斯稀疏信号^[7],即非零元

素独立同分布地服从均值为 0, 方差为 σ_x^2 的高斯分布. 本文中的噪声分量 \mathbf{w} 为脉冲噪声, 使用 2 阶高斯混合模型对其建模^[28], 其元素的概率密度函数为

$$p(z) = (1 - \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_g^2}\right) + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_o} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_o^2}\right) \quad (4)$$

其中 $\sigma_o^2 = \kappa\sigma_g^2$, 参数 ε 和 κ 分别称之为脉冲比和脉冲噪声方差比. 这一模型是鲁棒统计学中常用的一种脉冲噪声的模型^[10], 也常作为通信与信号处理系统中脉冲噪声的统计模型^[12,14,28].

我们希望能够从观测向量 \mathbf{y} 中直接估计出信号 \mathbf{x} 的支撑集和噪声向量 \mathbf{w} 中的脉冲所在的位置, 以便准确地处理脉冲噪声, 减少其影响. 从最大后验概率估计量的角度来解决这一问题, 我们将信号 \mathbf{x} 的支撑集记作

$$s = \text{supp}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

并且集合 s 的势记作 $|s| = K$, K 为信号的稀疏度. 噪声向量 \mathbf{w} 中的脉冲所在的位置的集合

$$o \triangleq \{i; w(i) \sim N(0, \sigma_o^2)\} \quad (6)$$

集合 o 的势为 $|o| = L$. 集合 o 的补集则可以表示为 $\bar{o} = \{1, 2, \dots, M\} \setminus o$.

我们通过解决如下问题来获得对 s 和 o 的估计,

$$\hat{s}, \hat{o} = \text{argmax}_{s, o} p(o, s | \mathbf{y}) \quad (7)$$

根据贝叶斯公式有

$$p(o, s | \mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y} | o, s) p(o, s)}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y} | o, s) p(o) p(s)}{p(\mathbf{y})} \quad (8)$$

集合 s 的可能性共有 C_N^K 种, 集合 o 的可能性共有 C_M^L 种, 每一种发生均是等可能的, 因而式(7)可以转换成

$$\hat{s}, \hat{o} = \text{argmax}_{s, o} p(\mathbf{y} | o, s) \quad (9)$$

因为 $\mathbf{x}_s, \mathbf{w}_o, \mathbf{w}_{\bar{o}}$ 服从联合高斯分布, 则观测向量 $\mathbf{y} | o, s$ 服从联合高斯分布. 也即 $\mathbf{y} | o, s \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{C})$, 因而有

$$p(\mathbf{y} | o, s) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} (\det(\mathbf{C}))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}\right) \quad (10)$$

则式(9)等价于:

$$\hat{s}, \hat{o} = \text{argmin} \log \det(\mathbf{C}) + \mathbf{y}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y} \quad (11)$$

压缩感知的 democracy 特性指出, 观测向量中的每个分量含有等量的关于原信号 \mathbf{x} 的信息^[29,30], 改变观测向量 \mathbf{y} 的顺序, 并不会影响信号的重构, 于是我们构造新的观测向量 $\tilde{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}_o^T \ \mathbf{y}_{\bar{o}}^T]^T$ 和新的观测矩阵 $\tilde{\Phi} = [\Phi_o^T \ \Phi_{\bar{o}}^T]^T$, 其中 \mathbf{y}_o 表示向量 \mathbf{y} 对应于集合 o 中的子向量, Φ_o 表示 Φ 中行对应于集合 o 的子矩阵. 并且可以获得

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\Phi} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{w}} \quad (12)$$

其中 $\tilde{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}_o^T \ \mathbf{w}_{\bar{o}}^T]^T$.

向量 $\tilde{\mathbf{y}}$ 也同样服从联合高斯分布, 即 $\tilde{\mathbf{y}} \sim N(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{C}})$, 其中

$$\tilde{\mathbf{C}} = E(\tilde{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{y}}^T) = \begin{bmatrix} E(\mathbf{y}_o \mathbf{y}_o^T) & E(\mathbf{y}_o \mathbf{y}_{\bar{o}}^T) \\ E(\mathbf{y}_{\bar{o}} \mathbf{y}_o^T) & E(\mathbf{y}_{\bar{o}} \mathbf{y}_{\bar{o}}^T) \end{bmatrix} \quad (13)$$

我们有

$$\mathbf{D} = E(\mathbf{y}_o \mathbf{y}_o^T) = \sigma_x^2 \Phi_{o,s} \Phi_{o,s}^T + \sigma_o^2 \mathbf{I}_{L \times L} \quad (14)$$

$$\mathbf{G} = E(\mathbf{y}_o \mathbf{y}_{\bar{o}}^T) = \sigma_x^2 \Phi_{o,s} \Phi_{\bar{o},s}^T \quad (15)$$

$$\Theta = E(\mathbf{y}_{\bar{o}} \mathbf{y}_o^T) = \sigma_x^2 \Phi_{\bar{o},s} \Phi_{o,s}^T \quad (16)$$

$$\Xi = E(\mathbf{y}_{\bar{o}} \mathbf{y}_{\bar{o}}^T) = \sigma_x^2 \Phi_{\bar{o},s} \Phi_{\bar{o},s}^T + \sigma_g^2 \mathbf{I}_{P \times P} \quad (17)$$

其中 $P = M - L$. 则式(11)等价于

$$\hat{s}, \hat{o} = \text{argmin} \log \det(\tilde{\mathbf{C}}) + \tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \quad (18)$$

本文中利用贪婪迭代的思想来求解上述问题. 在第 t 次迭代的过程中, 首先将 $t-1$ 次迭代时获得的集合 o 的估计 \hat{o}^{t-1} 代入到式(18), 此时式(18)只与集合 s 有关, 利用贪婪的思想获得集合 s 的估计 \hat{s}^t , 再将 \hat{s}^t 代入到式(18), 利用贪婪的思想获得集合 o 的估计 \hat{o}^t .

在算法迭代中, 不可避免的要多次计算协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{C}} \in R^{M \times M}$ 的行列式和逆矩阵, 而行列式和逆矩阵的求取的计算复杂度均为 $O(M^3)$, 计算复杂度很高. 我们做进一步的分析, 构造如下函数.

$$\mathbf{Q}_1(A, B) = \mathbf{I}_{K \times K} - \Phi_{A,B}^T \left(\Phi_{A,B} \Phi_{A,B}^T + \frac{\sigma_o^2}{\sigma_x^2} \mathbf{I}_{L \times L} \right)^{-1} \Phi_{A,B} \quad (19)$$

$$\mathbf{Z}(A, B) = \Phi_{A,B}^T \Phi_{A,B} \quad (20)$$

$$\mathbf{Q}_2(A, B) = \mathbf{I}_{K \times K} - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_o^2} \mathbf{Z}(A, B) + \frac{\sigma_x^4}{\sigma_o^4} \mathbf{Z}(A, B) \cdot \left(\mathbf{I}_{K \times K} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_o^2} \mathbf{Z}(A, B) \right)^{-1} \mathbf{Z}(A, B) \quad (21)$$

$$\mathbf{Z}_1(A, B) = \left[\frac{1}{\sigma_o^2} \Phi_{A,B}^T \quad \frac{1}{\sigma_g^2} \Phi_{A,B}^T \right]^T \quad (22)$$

$$\mathbf{Z}_2(A, B) = \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{Z}_1(A, B) \quad (23)$$

$$f_1(A, B) = \log(\det(\sigma_x^2 \Phi_{A,B} \Phi_{A,B}^T + \sigma_o^2 \mathbf{I}_{L \times L})) + \log\left(\det\left(\mathbf{I}_{K \times K} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_o^2} \Phi_{A,B}^T \Phi_{A,B} \mathbf{Q}_1(A, B)\right)\right) + \frac{1}{\sigma_o^2} \|\mathbf{y}_A\|_2^2 + \frac{1}{\sigma_g^2} \|\mathbf{y}_{\bar{A}}\|_2^2 - \sigma_x^2 \mathbf{Z}_2(A, B) (\mathbf{I}_{K \times K} + \sigma_x^2 \mathbf{Z}_1(A, B))^T \tilde{\Phi}_{\{1,2,\dots,M\},B}^{-1} \mathbf{Z}_2(A, B)^T \quad (24)$$

$$f_2(A, B) = \log\left(\det\left(\mathbf{I}_{K \times K} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_o^2} \Phi_{A,B}^T \Phi_{A,B}\right)\right) + \log\left(\det\left(\mathbf{I}_{K \times K} + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_g^2} \Phi_{A,B}^T \Phi_{A,B} \mathbf{Q}_2(A, B)\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{\sigma_o^2} \| \mathbf{y}_A \|_2^2 + \frac{1}{\sigma_g^2} \| \mathbf{y}_A \|_2^2 - \sigma_x^2 \mathbf{Z}_2(A, B) (\mathbf{I}_{K \times K} + \sigma_x^2 \mathbf{Z}_1(A, B)^T \widehat{\Phi}_{\{1,2,\dots,M\},B}^{-1} \mathbf{Z}_2(A, B))^T \quad (25)$$

综合上面的分析,提出 BINSR 算法来求解式(18)的问题,伪代码如下。

算法 1 BINSR 算法

输入:观测向量 \mathbf{y} , 观测矩阵 Φ , 稀疏度 K , 脉冲数 L , 信号方差 σ_x^2 , 脉冲噪声参数 σ_g^2, σ_o^2

初始化: $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$, $\Omega_1 = \{1, 2, \dots, M\}$, $A_0^1 = \emptyset$.

迭代过程: 第一步: $k_0^j = 0, l_0^j = 0, A_0^j = \emptyset, B_0^j = \emptyset, j = 1, m = 1$.

第二步: while $j \leq K$

$$\Gamma_j^i = \Omega \setminus B_{j-1}^i;$$

$$\tilde{B}_{j,i}^i = B_{j-1}^i \cup \{\Gamma_j^i(i)\}, i = 1, \dots, |\Gamma_j^i|;$$

$$k_j^i = k_{j-1}^i + 1;$$

$$\text{If } k_j^i \leq \lfloor 1.5L \rfloor$$

$$\hat{i} = \underset{i \in \{1, \dots, |\Gamma_j^i|\}}{\operatorname{argmin}} f_2(A_{\lfloor 1.5L \rfloor}^i, \tilde{B}_{j,i}^i);$$

$$v_j^i = f_2(\lfloor 1.5L \rfloor, \tilde{B}_{j,i}^i);$$

else

$$\hat{i} = \underset{i \in \{1, \dots, |\Gamma_j^i|\}}{\operatorname{argmin}} f_1(A_{\lfloor 1.5L \rfloor}^i, \tilde{B}_{j,i}^i);$$

$$v_j^i = f_1(A_{\lfloor 1.5L \rfloor}^i, \tilde{B}_{j,i}^i);$$

$$B_j^i = B_{j-1}^i \cup \{\Gamma_j^i(\hat{i})\};$$

$$j = j + 1;$$

第三步: while $m \leq \lfloor 1.5L \rfloor$

$$H_m^i = \Omega_1 \setminus A_{m-1}^i;$$

$$\tilde{A}_{m,i}^i = A_{m-1}^i \cup \{H_m^i(i)\} i = 1, \dots, |H_m^i|;$$

$$l_m^i = l_{m-1}^i + 1;$$

$$\text{If } l_m^i \leq K$$

$$\hat{i} = \underset{i \in \{1, \dots, |H_m^i|\}}{\operatorname{argmin}} f_1(\tilde{A}_{m,i}^i, B_k^i);$$

$$u_m^i = f_1(\tilde{A}_{m,i}^i, B_k^i);$$

else

$$\hat{i} = \underset{i \in \{1, \dots, |H_m^i|\}}{\operatorname{argmin}} f_2(\tilde{A}_{m,i}^i, B_k^i);$$

$$u_m^i = f_2(\tilde{A}_{m,i}^i, B_k^i);$$

$$A_m^i = A_{m-1}^i \cup \{H_m^i(\hat{i})\};$$

$$m = m + 1;$$

第四步: if $|u_{\lfloor 1.5L \rfloor}^i - u_{\lfloor 1.5L \rfloor}^{\hat{i}}| < 1$ & $|v_k^i - v_k^{\hat{i}}| < 1$, 迭代终止。

输出: $\hat{o} = A_{\lfloor 1.5L \rfloor}^i$;

$$\hat{s} = B_k^i;$$

根据观测序列的 democracy 特性,利用 MMSE 估计量获得信号向量 \mathbf{x} 的估计

$$\hat{\mathbf{x}}_i = E(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \hat{o}, \hat{s}) = \sigma_x^2 \Phi_{\hat{o}, \hat{s}}^T (\sigma_x^2 \Phi_{\hat{o}, \hat{s}}^T \Phi_{\hat{o}, \hat{s}}^T + \sigma_g^2 \mathbf{I}_{P \times P})^{-1} \mathbf{y}_{\hat{o}} \\ \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}.$$

决定 BINSR 算法性能的一个很重要的方面是迭代终止条件的选取。上面的伪代码给出了一种迭代终止条件,要求当估计的信号支撑集和噪声的脉冲位置集

合变化很小的时候迭代终止。另外一种可行的终止条件为当 $u_{\lfloor 1.5L \rfloor}^i > u_{\lfloor 1.5L \rfloor}^{\hat{i}}$ 与 $v_k^i > v_k^{\hat{i}}$ 同时满足时,迭代终止。

计算复杂度分析:本文提出的 BINSR 算法的计算复杂度主要集中在函数 f_1 和 f_2 的计算上,其计算复杂度均为 $O(K^2M)$,则当 $K > \lfloor 1.5L \rfloor$ 时, BINSR 算法一次最外层循环的计算复杂度为 $O(K^3MN)$,否则, BINSR 算法一次最外层循环的计算复杂度为 $O(K^2LMN)$ 。

4 自适应贝叶斯脉冲噪声稀疏重构 (Adaptive Bayesian Impulsive Noise Sparse Reconstruction, ABINSR) 算法

实际的通信环境中,在重构端 BINSR 算法中要求输入的信号以及噪声的统计参数是无法事先获知的,因而接下来我们提出对统计参数自适应的 ABINSR 算法。我们定义如下符号

$$\boldsymbol{\Upsilon} = (\sigma_x^2, L, \sigma_g^2, \sigma_o^2) \quad (26)$$

$\boldsymbol{\Upsilon}$ 中的参数即为与信号和噪声相关的统计参数,其中 σ_x^2 为高斯稀疏信号的方差, L 为脉冲数, σ_g^2 和 σ_o^2 是脉冲噪声的 2 阶高斯混合模型中的参数, σ_g^2 对应于白噪声的方差, σ_o^2 为脉冲的方差。在 ABINSR 算法中,我们首先对 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 中参数进行初步的估计,再将估计获得的 $\hat{\boldsymbol{\Upsilon}}$ 作为 BINSR 算法的输入参数。我们利用鲁棒统计学中的一步估计法^[10,31]来初步的估计脉冲所在的位置。

通过一步估计法,获得脉冲所在位置集合 o 的初始估计 \hat{o}^0 ,则对于脉冲数 L 的估计可以表示成 $\hat{L} = |\hat{o}^0|$,经过初始检测后,没有受到脉冲干扰的观测数据的位置的集合记作 Λ^0 。本文中的观测矩阵为高斯随机矩阵,其元素服从均值为 0,方差为 $1/M$ 的独立同分布的高斯分布。需要指出的是本文中算法并不仅仅适用于高斯随机矩阵,其他的矩阵(例如贝努利矩阵)也适用,由于空间的限制,我们不对这一方面做具体分析。我们有

$$E_{\Phi}(\mathbf{y}_o^0 \mathbf{y}_o^{0T}) = \sigma_x^2 \frac{K}{M} \mathbf{I}_{\hat{L} \times \hat{L}} + \sigma_o^2 \mathbf{I}_{\hat{L} \times \hat{L}} \quad (27)$$

$$E_{\Phi}(\mathbf{y}_{\Lambda^0} \mathbf{y}_{\Lambda^0}^T) = \sigma_x^2 \frac{K}{M} \mathbf{I}_{(M-\hat{L}) \times (M-\hat{L})} + \sigma_g^2 \mathbf{I}_{(M-\hat{L}) \times (M-\hat{L})} \quad (28)$$

由点估计我们获得

$$\begin{cases} \frac{1}{\hat{L}} \| \mathbf{y}_o^0 \|_2^2 = \frac{K}{M} \sigma_x^2 + \sigma_o^2 \\ \frac{1}{M-\hat{L}} \| \mathbf{y}_{\Lambda^0} \|_2^2 = \frac{K}{M} \sigma_x^2 + \sigma_g^2 \end{cases} \quad (29)$$

根据脉冲噪声的特性,

$$\sigma_o^2 \gg \sigma_g^2 \quad (30)$$

结合式(29)和式(30),我们可以获得参数 $(\sigma_x^2, \sigma_g^2, \sigma_o^2)$ 的

估计为

$$\hat{\sigma}_o^2 = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \left(\frac{1}{\hat{L}} \|y_{o^0}\|_2^2 - \frac{1}{M - \hat{L}} \|y_{\Lambda^0}\|_2^2 \right) \quad (31)$$

$$\hat{\sigma}_g^2 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\hat{L}} \|y_{o^0}\|_2^2 - \frac{1}{M - \hat{L}} \|y_{\Lambda^0}\|_2^2 \right) \quad (32)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{M}{K} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{M - \hat{L}} \|y_{\Lambda^0}\|_2^2 - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\hat{L}} \|y_{o^0}\|_2^2 \right) \quad (33)$$

其中 λ 是个很大的数. 基于上述分析, 我们可以获得 $\hat{\gamma} = (\hat{\sigma}_x^2, \hat{L}, \hat{\sigma}_g^2, \hat{\sigma}_o^2)$.

在此基础上, 提出 ABINSR 算法, 其伪代码如下:

算法 2 ABINSR 算法

输入: 观测向量 y , 观测矩阵 Φ , 稀疏度 K

第一步: 初始检测, 获取集合 o 的初始估计 \hat{o}^0 ;

第二步: 根据式(31)(32)(33)估计参数;

第三步: 调用 BINSR 算法 $\text{BINSR}(y, \Phi, K, 2\hat{L}, \hat{\sigma}_x^2, \hat{\sigma}_g^2, \hat{\sigma}_o^2)$;

输出: $\hat{x}_s = E(x|y, \hat{o}, \hat{s}) = \hat{\sigma}_x^2 \Phi_{\hat{o}, \hat{s}}^T (\hat{\sigma}_x^2 \Phi_{\hat{o}, \hat{s}} \Phi_{\hat{o}, \hat{s}}^T + \hat{\sigma}_g^2 I_{p \times p})^{-1} y_{\hat{o}}$

$\hat{x}_{\bar{s}} = 0$.

5 实验结果及分析

本文中实验的对象为高斯稀疏信号, 方差为 $\sigma_x^2 = 1$, 长度为 $N = 256$. 在生成脉冲噪声的过程中, $\sigma_g^2 = 0.002$. 文中使用高斯随机矩阵作为观测矩阵, 其元素独立同分布地服从均值为 0 方差为 $1/M$ 的高斯分布. 文中所得结果均为 100 次实验的均值. 本文中用于衡量算法重构原信号性能的指标是平均信噪比 aveSNR.

5.1 BINSR 算法性能分析

5.1.1 BINSR 算法与传统压缩感知重构算法性能对比

为了说明问题以及节省空间, 我们仅以信号稀疏度为 10 情况为例. 从图 1 中我们可以很明显地看出, SP、LASSO、FBMP、BCS 算法均很大程度上受到了脉冲噪声的影响, 而且对脉冲比 ϵ 和脉冲噪声方差比 κ 均很敏感, 随着参数取值的增加, 重构的平均信噪比急剧下降. 而本文中提出的 BINSR 算法重构的平均信噪比对脉冲噪声方差比 κ 不敏感, 而且无论脉冲比 ϵ 是 0.05 还是 0.1, 无论脉冲噪声方差比 κ 为 $[100, 1000]$ 中的任意值, BINSR 算法重构的平均信噪比都要远远优于其他四种算法, 而且随着噪声方差比 κ 的增大, 这种优势更明显. 也就是说, 一旦通信环境中存在有脉冲噪声, 基于传统算法的压缩感知重构系统无法保证以比较理想的性能重构出原信号, 甚至在一些情况下会崩溃. 虽然在上面的复杂度分析中, BINSR 算法的复杂度较高, 但是相比于系统崩溃这样严重的后果, 其仍然是值得的. 当然, 在本文提出的 BINSR 算法的基础上, 如何设计出快速算法, 也是接下来研究的重点.

5.1.2 BINSR 算法的脉冲检测性能

BINSR 算法可以同时估计出脉冲所在的位置, 本文中用来衡量脉冲检测性能的参数为脉冲检测正确率, 其定义为

$$\text{脉冲检测正确率} = |o \cap \hat{o}| / |\hat{o}| \quad (34)$$

图 2 中给出了稀疏度 K 分别为 10 和 20, 脉冲比 ϵ 分别为 0.05 和 0.1 时, 不同脉冲噪声方差比下的 BINSR 算法的平均脉冲检测正确率. 总体来讲, 从图 2 中可以看到, 随着脉冲噪声方差比的增加, BINSR 算法的平均脉冲检测正确率也增加. 这里需要指出的是尽管随着脉冲噪声方差比的增加, BINSR 算法的平均脉冲检测正确率得到改善, 而 BINSR 算法重构的平均信噪比对脉冲噪声方差比 κ 是不敏感的. 也就是说, 在脉冲噪声方差比的增加带来平均脉冲检测正确率提升的同时, 单个脉冲对于平均信噪比的影响也变大了. 因而, BINSR 算法在脉冲检测的正确率与脉冲对于重构的平均信噪比的影响之间实现了一种折中.

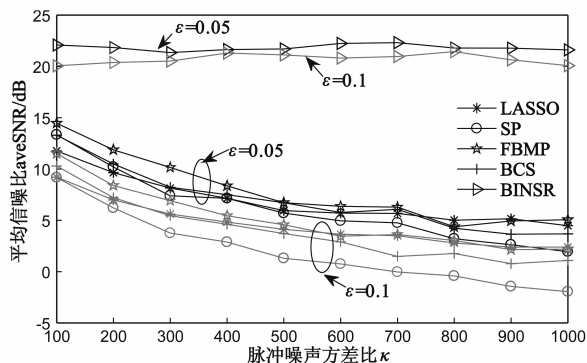


图1 脉冲噪声环境下不同算法的平均信噪比

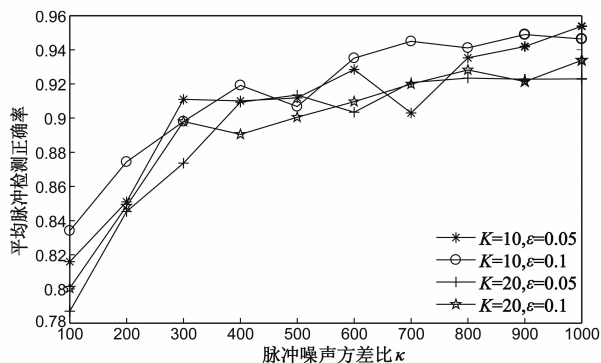


图2 BINSR算法的平均脉冲检测正确率

5.1.3 BINSR 算法与 JP 算法性能对比

在这一节中比较本文提出的 BINSR 算法与 JP 算法的性能. JP 算法的特点在于其将噪声向量转换成信号向量进行处理, 在实验过程中我们发现 JP 算法与 BINSR 算法一样, 对于脉冲噪声方差比 κ 不敏感, 这一点我们可以从图 3 中看出, 当 $\kappa = 100$ 和 $\kappa = 1000$ 时, BINSR 算法和 JP 算法性能的变化并不明显. 图 3 中同时给出

了当脉冲比 $\epsilon = 0.05$ 和 0.1 时 BINSR 算法和 JP 算法的性能对比. 很明显, 无论 ϵ 取何值, 本文提出的 BINSR 算法的性能均要远优于 JP 算法.

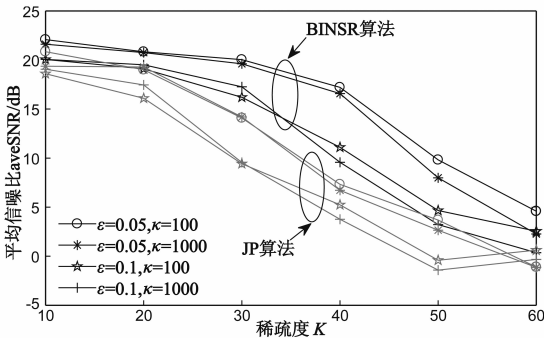


图3 BINSR算法与JP算法重构的平均信噪比

5.1.4 BINSR 算法收敛性分析

BINSR 算法要求当 $|u'_{[1.5L]} - u'^{-1}_{[1.5L]}| < 1$ 和 $|v'_k - v'^{-1}_k| < 1$ 同时满足时, 算法迭代终止. 我们首先分析这两个差值的衰减性. 图 4 给出了这两个差值在不同迭代次数时的衰减曲线. 我们在稀疏度 K 分别为 10 和 20, 脉冲比 ϵ 分别为 0.05 和 0.1, 脉冲噪声方差比 κ 为 1000 时得到图 4 中的结果. 图 4 中红色曲线和黑色曲线分别为差值 $|u'_{[1.5L]} - u'^{-1}_{[1.5L]}|$ 和 $|v'_k - v'^{-1}_k|$ 在不同稀疏度和脉冲比下的衰减曲线, 蓝色曲线为 BINSR 算法的迭代终止门限. 从图 4 中我们可以清晰地看到 BINSR 算法迭代终止条件中的两个差值具有比较好的衰减特性. 其次, 我们来分析在不同稀疏度下 BINSR 算法的平均迭代次数. 从表 1 中可以看到随着稀疏度 K 和脉冲比 ϵ 的增加, BINSR 算法的平均迭代次数都会增加. 因而, 稀疏度 K 和脉冲比 ϵ 是影响 BINSR 算法收敛性的两个主要的因素.

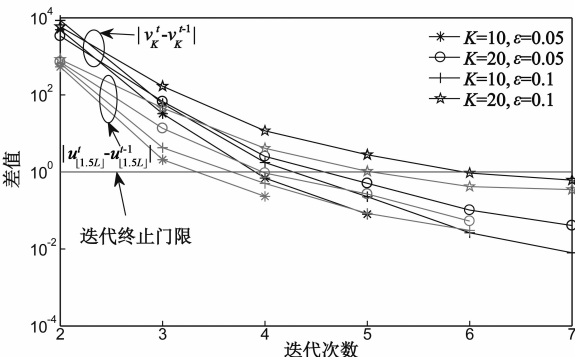


图4 BINSR算法收敛性分析的衰减曲线

表 1 BINSR 算法的平均迭代次数

稀疏度 K	10	20	30	40	50	60
脉冲比 ϵ						
0.05	4.11	4.49	6.42	11.75	12.45	13.1507
0.1	4.46	5.56	7.5775	15.5	17.21	28.93

5.2 ABINSR 算法性能分析

5.2.1 ABINSR 算法在脉冲噪声环境下的性能

ABINSR 算法对信号以及噪声的统计参数自适应, 在估计参数的公式(31)、(32)、(33)中引入了参数 λ , 根据脉冲噪声的特点, λ 是个比较大的数. 我们首先分析在参数 λ 取不同值时 ABINSR 算法的性能. 为了节省空间, 我们只给出了稀疏度为 20 时, ABINSR 算法性能与参数 λ 的关系. 从图 5 可以看到, 无论脉冲比和脉冲噪声方差比为何值, 当 $\lambda \geq 400$, ABINSR 算法的性能的变化不大. 因而, 在接下来的实验中, λ 设定为常数值 1400. 图 6 表明, ABINSR 算法相对于 BINSR 算法性能稍微下降, 当稀疏度 $K \in [10, 30]$, 平均信噪比的相差最多不超过 1.5dB. 从图 7 中可以发现, ABINSR 算法的平均脉冲检测正确率也同样随着脉冲噪声方差比的增加而增大, 而且 BINSR 算法的平均脉冲检测正确率同样要略优于 ABINSR 算法. 图 8 中比较 ABINSR 算法与 JP 算法的性能, 可以看出 ABINSR 算法的性能仍然远优于 JP 算法.

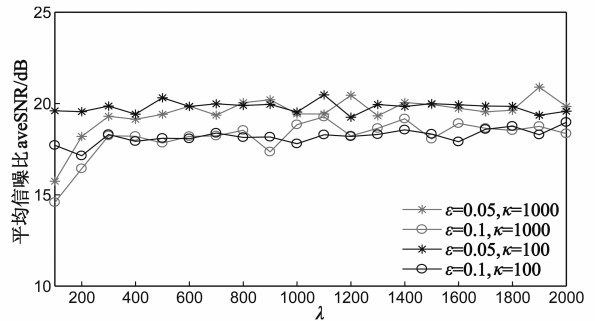


图5 ABINSR算法重构的平均信噪比与参数lambda的关系曲线

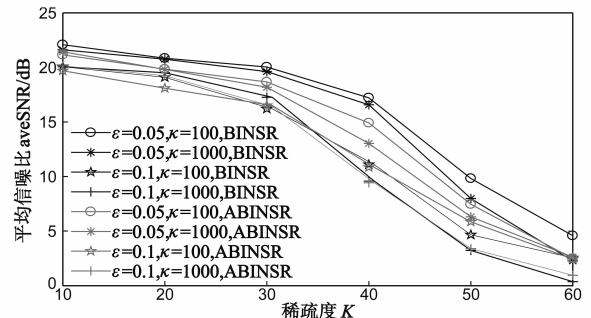


图6 BINSR算法与ABINSR算法重构的平均信噪比

5.2.2 ABINSR 算法在 Gaussian 白噪声环境下的性能

在实际的应用中, 我们不仅需要保证 ABINSR 算法在脉冲噪声环境下的鲁棒性, 也需要保证算法在 Gaussian 白噪声环境下的有效性. 所谓 Gaussian 白噪声环境下的有效性是指当观测序列受到 Gaussian 白噪声干扰时, 算法能够有效地从含噪观测序列中恢复出信号. 我们在 Gaussian 白噪声环境下测试 ABINSR 算法的性能, 并将其与传统的压缩感知重构算法相对比, 仿真结果如图 9 所示. 从

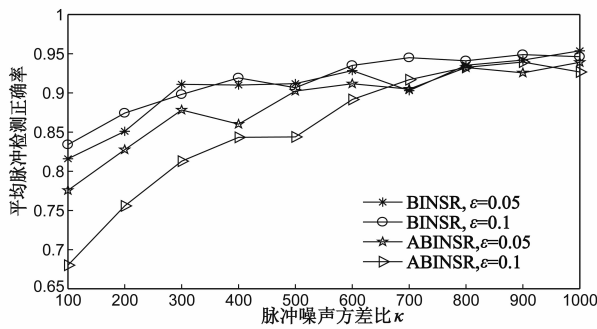


图7 ABINSR算法的平均脉冲检测正确率

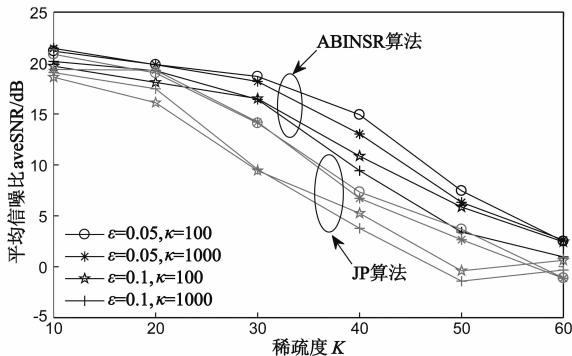


图8 ABINSR算法与JP算法重构的平均信噪比

图9中我们可以看到,当稀疏度 $K \leq 30$ 时,ABINSR 算法与传统压缩感知重构算法重构的平均信噪比相近.然而,当稀疏度 $K > 30$,ABINSR 算法的性能出现明显的下降.因而,如果为了更好地保障 ABINSR 算法在高斯白噪声环境下的有效性,需要增加观测数.这也是为了保障 ABINSR 算法对于脉冲噪声的鲁棒性所付出的代价.

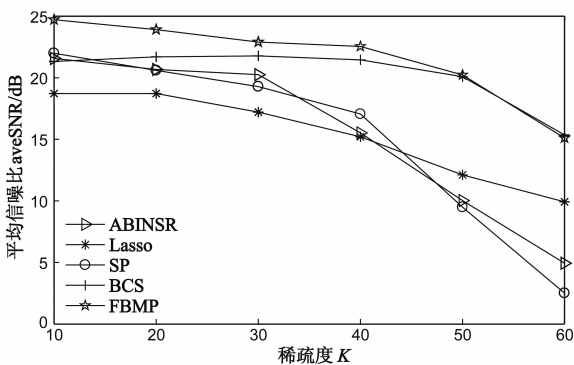


图9 高斯白噪声环境下不同算法的平均信噪比

6 小结及后续工作

本文基于贝叶斯理论和压缩感知 democracy 特性提出了一种新的压缩感知重构算法 BINSR 算法,用于在脉冲噪声环境下实现高斯稀疏信号的有效重构;针对实际情况下噪声特性是未知的,本文在 BINSR 算法的基础上提出了一种自适应的 ABINSR 算法,使得算法对于信号以及噪声的统计参数自适应.实验结果表明,在

脉冲噪声环境下,大多数现有的压缩感知算法将会崩溃,然而本文提出的 BINSR 算法以及 ABINSR 算法仍然可以很有效地实现信号的重构,而且性能远优于现有的 JP 算法.而且,ABINSR 算法不仅对脉冲噪声具有鲁棒性,其还可以在高斯白噪声环境下实现有效的信号重构.

本文提出的算法对于压缩感知理论在实际环境中的应用有着十分重要的作用.但是其在算法的计算复杂度和信源的普适性上仍然有很大的改善空间.接下来,将在这两方面进行深入的研究,致力于设计出 ABINSR 算法的快速算法以及更为普适的 ABINSR 算法.

参考文献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [2] Candes E J, Tao T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(2): 4203 - 4215.
- [3] Tasig Y, Donoho D L. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533 - 548.
- [4] 孙林慧,杨震,叶蕾.基于自适应多尺度压缩感知的语音压缩与重构[J].电子学报,2011,39(1):40 - 45.
Sun Linhui, Yang Zhen, Ye Lei. Speech compression and reconstruction based on adaptive multiscale compression sensing theory[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 40 - 45. (in Chinese)
- [5] 叶蕾,杨震,王天荆,孙林慧.行阶梯观测矩阵、对偶仿射尺度内点重构算法下的语音压缩感知[J].电子学报,2012,40(3):429 - 434.
Ye Lei, Yang Zhen, Wang Tianjing, Sun Linhui. Compressed sensing of speech signal based on row echelon measurement matrix and dual affine scaling interior point reconstruction method[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(3): 429 - 434. (in Chinese)
- [6] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso[J]. Journal Royal Statistical Society B, 1996, 58: 267 - 288.
- [7] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 - 2249.
- [8] Ji S H, Xue Y, Carin L. Bayesian compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346 - 2356.
- [9] Schniter P, Potter L C, Ziniel J. Fast Bayesian matching pursuit[A]. Information Theory and Applications Workshop-Conference Proceedings[C]. San Diego, CA, USA, 2008. 326 - 333.
- [10] Maronna R A, Martin R D, Yohai V J. Robust Statistics: Theory and Methods[M]. New York: John Wiley & Sons, 2006.

- [11] Laska J N, Davenport M A, Baraniuk R G. Exact signal recovery from sparsely corrupted measurements through the pursuit of justice [A]. 43rd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers [C]. Pacific Grove, CA, USA, 2009. 1556 – 1560.
- [12] X Wang, H V Poor. Robust Multiuser detection in Non-gaussian channels [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 86(3): 549 – 571.
- [13] L Lampe. Bursty impulse noise detection by compressed sensing [A]. IEEE International Symposium on Powerline Communications and Its Applications [C]. Udine, Italy, 2011. 29 – 34.
- [14] S V Zhidkov. Analysis and comparison of several simple impulsive noise mitigation schemes for OFDM receivers [J]. IEEE Transactions on Communications, 2008, 56(1): 5 – 9.
- [15] G Arce. Nonlinear Signal Process: A Statistical Approach [M]. New York: Wiley, 2005.
- [16] R Chan, C Ho, M Nikolova. Salt-and-pepper noise removal by median-type noise detectors and detail-preserving regularization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(10): 1479 – 1485.
- [17] C Studer, P Kuppinger, G Pope, H Bolcskei. Sparse signal recovery from sparsely corrupted measurements [A]. IEEE International Symposium on Information Theory-Proceedings [C]. St Petersburg, Russia, 2011. 1422 – 1426.
- [18] R E Carrillo, K E Barner, T C Aysal. Robust sampling and reconstruction methods for sparse signals in the presence of impulsive noise [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 392 – 408.
- [19] Baraniuk R, Devenport M, Devore R, Wakin M. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices [A]. Compute Rendus de l'Academie des Science [C]. Paris, 2008. 589 – 592.
- [20] Cohen A, Dahmen W, Devore R. Compressed sensing and best k-term approximation [J]. Journal of American Society, 2009, 27(3): 265 – 274.
- [21] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129 – 159.
- [22] Figueiredo Mario A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586 – 597.
- [23] Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655 – 4666.
- [24] Donoho D L, Tsaig Y, Strack J L. Sparse solution of underdetermined linear equation by stagewise orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094 – 1121.
- [25] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 310 – 316.
- [26] Do T T, Gan L, Nguyen N, Tran T D. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [A]. 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers [C]. Pacific Grove, CA, USA, 2008. 581 – 587.
- [27] Qiu K, Aleksandar D. Variance-component based sparse signal reconstruction and model selection [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(6): 2935 – 2952.
- [28] Pham D S, Venkatesh S. Improved image recovery from compressed data contaminated with impulsive noise [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(1): 397 – 405.
- [29] Davenport M A, Laska J N, Boufounos P T. A simple proof that random matrices are democratic [J]. Const Approximation, 2008, 28(3): 253 – 263.
- [30] Laska J N, Boufounos P T, Davenport P T, Baraniuk R G. Democracy in action: quantization, saturation and compressive sensing [J]. Applied and Computational Harmonic analysis, 2011, 31(3): 429 – 443.
- [31] D. Gervini, V J Yohai. A class of robust and fully efficient regression estimators [J]. The Annals of Statistics, 2002, 30(2): 583 – 616.

作者简介



季云云 女, 1988 年生于江苏南通, 博士, 研究方向为鲁棒性压缩感知重构、语音信号处理。

E-mail: jiyunyun1988@126.com



杨震 男, 1961 年生于江苏武进, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为无线通信与网络信号处理、语音处理与现代通信、信息安全技术。

E-mail: yangz@njupt.edu.cn